Μαθημα 5º 26/3/2018

Ολοκληρωτικές

Άσκηση

Να αποδείξετε ότι

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sinh t}{t}\right\} = \frac{1}{2}\log\frac{s+1}{s-1}, \quad s>1$$

απάντηση

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

$\lim e^{-t}\sinh t = \frac{1}{2}$ άρα η $f(t)=\sinh t$ είναι τάξης 1

$\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\sinh t}{t} = 1$ άρα υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace $\mathcal{L}\left\{\frac{\sinh t}{t}\right\}$

$$\mathcal{L}\left\{\sinh t\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^t\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-t}\}$$

όμως $\mathcal{L}\{e^t\} = \frac{1}{s-1}, \quad s>1$

$$\mathcal{L}\{f(t)\,e^{at}\} = F(s-a)$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \mathcal{L}\{e^{at}\cdot 1\} = \frac{1}{s-a}, \quad s>a$$

οπότε

$$\mathcal{L}\{e^{-t}\} = \frac{1}{s+1}, \quad s>1$$

οπότε

$$\mathcal{L}\{\sinh t\} = \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1}, \quad s>1$$

Άρα

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sinh t}{t}\right\}(s) = \int_s^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{u+1}\right)du$$

Όμως για $x > s > 1$ έχουμε

$$\int_s^k \frac{1}{u-1}\,du = [\log|u-1|]_s^k = \log\frac{|k-1|}{|s-1|}$$

Όμοια

$$\int_s^k \frac{1}{u+1}\,du = \log\frac{|k+1|}{|s+1|}$$

Άρα ο μετασχηματισμός Laplace θα είναι

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sinh t}{t}\right\} = \lim_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\left(\log|k-1| - \log|s-1|\right) - \log|k+1| + \log|s+1|\right\} =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2}\left(\log\frac{|k-1|}{|k+1|} + \log\frac{|s+1|}{|s-1|}\right) =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2}\left(\log\frac{k|1-\frac{1}{k}|}{k|k+\frac{1}{k}|} + \log\frac{|s+1|}{|s-1|}\right) = \frac{1}{2}\log\frac{s+1}{s-1}, \quad s > 1$$

Άσκηση

Αν $\mathcal{L}\{f''(t)\} = \text{Arctg}$, γνωρίζω επίσης $f(0)=2$, $f'(0)=-1$

Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της f

Λύση

Από τον τύπο μετασχηματισμού Laplace της παραγώγου

έχω: $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - \{s^{(2-1)}f(0) + f'(0)\}$

Άρα

$$\text{Arctg}\frac{1}{s} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - 2s + 1$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^2}\left(\text{Artg}\frac{1}{s} + (2s-1)\right)$$

• Μετασχηματισμός Laplace περιοδικών συναρτήσεων

• Θεώρημα

Έστω μια συνάρτηση $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ η οποία είναι περιοδική με περίοδο $T>0$ και έστω επίσης ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,T]$.
Τότε για $s>0$ υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της f και δίνεται από τον εξής τύπο

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T f(t)\, e^{-st}\, dt$$

απόδειξη

Έστω $s>0$, θα έχουμε ότι

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt = \lim_{k\to+\infty} \int_0^{(k+1)T} e^{-st} f(t)\, dt =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{k} \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} f(t)\, dt \quad (*)$$

Όμως

$$\int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} f(t)\, dt$$

Θέτω $t = y + nT$ τότε $dt = dy$

Επίσης $T = nt \to y = 0$

$T = (n+1)T \to y = T$

Άρα μετά τις αντικαταστάσεις έχουμε

$$\int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^T e^{-s(y+nT)} f(y+nT)\, dy \overset{f \text{ περιοδική με περίοδο } T}{=}$$

$$= e^{-snT} \underbrace{\int_0^T e^{-sy} f(y)\, dy}_{\text{θέτω } A} = e^{-snT} \cdot A$$

Αρα $\mathcal{L}\{f(t)\} \overset{(*)}{=} \lim_{k\to+\infty} (A + Ae^{-Ts} + \dots + e^{-kTs} \cdot A) =$

$= \lim_{k\to+\infty} A \cdot \sum_{n=0}^{k} e^{-nTs}$

ομως $\omega = e^{-sT} < 1 \quad (s, T > 0)$

Αρα

$\mathcal{L}\{f(t)\} = A \cdot \frac{1}{1-e^{-sT}}$

Άσκηση

Δινεται η συναρτηση $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ η οποια είναι περιοδική με περιοδο $T=1$ και

$$f(t) = \begin{cases} t, & t \in [0,1) \\ 0, & t=1 \end{cases}$$

Να βρείτε το $\mathcal{L}\{f(t)\}$

απαντηση

Η f είναι ολοκληρωσιμη στο $[0,1]$ και εχει ενα σημειο ασυνεχειας Είναι περιοδική με $T=1$

Για $s>0$ εχουμε

$$\int_0^1 e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^1 e^{-st} \cdot t\, dt = \int_0^1 t\left(-\frac{1}{s} e^{-st}\right)' dt =$$

$$= \left[-\frac{t}{s} e^{-st}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{s} e^{-st}\, dt = -\frac{1}{s} e^{-s} + \frac{1}{s}\int_0^1 \left(-\frac{1}{s} e^{-st}\right)' dt =$$

$$= -\frac{1}{s} e^{-s} - \frac{1}{s^2} e^{-s} + \frac{1}{s^2}$$

οποτε

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^1 f(t)\, e^{-st}\, dt = \frac{1}{1-e^{-s}} \left(-\frac{1}{s} e^{-s} - \frac{1}{s^2} e^{-s} + \frac{1}{s^2} \right)$$

▶ Αντιστροφος μετασχηματισμος Laplace

Εστω F ορισμενη σε ενα συνολο της μορφης $(a, +\infty)$

Αν υπαρχει συναρτηση f ορισμενη στο $(0, +\infty)$ τετοια ωστε $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$

τοτε λεμε οτι η f ειναι ο αντιστροφος μετασχηματισμος Laplace της F (και συμβολικα $\mathcal{L}^{-1}\{F\} = f$)

▶ Σημειωση

Εαν εχουμε δυο συναρτησεις στο ιδιο διαστημα (f και g) οι οποιες διαφερουν μονο σε πεπερασμενο πληθος σημειων τοτε $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$, $([a,b] \subseteq I)$

▶ Θεωρημα του Lerch

Εστω $f, g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχεις οι οποιες εχουν τον ιδιο μετασχηματισμο Laplace τοτε $f(t) = g(t) \quad \forall\, t \in (0, +\infty)$

Παρατηρηση

Το παραπανω θεωρημα λεει οτι αν μια συναρτηση F εχει αντιστροφο μετασχηματισμο Laplace που ειναι συνεχης συναρτηση τοτε αυτη θα ειναι μοναδικη συνεχη συναρτηση που θα εχει αυτον τον μετασχηματισμο Laplace

Π.χ.

Γνωρίζουμε $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$

Η $f(t)=1$ είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$

Άρα αυτή θα είναι μοναδική συνεχής συνάρτηση

που θα έχει αυτό το μετασχ. Laplace $\frac{1}{s}$

• Λόγω της γραμμικότητας του μετασχηματισμού Laplace

έχουμε για c_1, c_2 πραγματικές σταθερές

$\mathcal{L}^{-1}\{c_1 F_1 + c_2 F_2\} = c_1 \mathcal{L}^{-1}\{F_1\} + c_2 \mathcal{L}^{-1}\{F_2\}$

Άσκηση

Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

της $F(s) = \dfrac{2s-1}{s^2+4s+29}$

Λύση

$s^2+4s+29 = (s+2)^2+5^2$

οπότε: μετατόπιση κατά -2

$$F(s) = \frac{2s-1}{(s+2)^2+5^2} = \frac{2(s+2)-5}{(s+2)^2+5^2} =$$

$$= 2\cdot\frac{s+2}{(s+2)^2+5^2} - 5\cdot\frac{1}{(s+2)^2+5^2}$$

όμως

$\mathcal{L}\{\sin 5t\} = 5/s^2+5^2$ και

$\mathcal{L}\{e^{-2t}\sin 5t\} = 5\cdot\dfrac{1}{(s+2)^2+5^2}$

Βασικοί μετασχ. Laplace

$\mathcal{L}\{\cos t\} = s/s^2+1 \quad , s>0$

$\mathcal{L}\{\sin t\} = 1/s^2+1$

$\mathcal{L}\{\cos at\} = s/s^2+a^2$

$\mathcal{L}\{\sin at\} = a/s^2+a^2$

$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F(s/a) \quad s>s_0 \cdot a$

$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a) \quad s>s_0+a$

Scanned by CamScanner

όμοια

$$\mathcal{L}\{\cos 5t\} = \frac{s}{s^2+5^2}$$

$$\mathcal{L}\{e^{-2t}\cos 5t\} = \frac{s+2}{(s+2)^2+5^2}$$

οπότε

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = 2e^{-2t}\cos 5t - e^{-2t}\sin 5t$$

Άσκηση

Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχ. Laplace της

$$F(s) = \frac{s+12}{s^2+20s+64}$$

Λύση

$s^2+20s+64 = (s+4)(s+16)$

Συνεπώς

$$\frac{s+12}{s^2+20s+64} = \frac{s+12}{(s+4)(s+16)} = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s+16}$$

$$\frac{s+12}{s^2+20s+64} = \frac{A(s+16)+B(s+4)}{(s+4)(s+16)} \Rightarrow s+12 = As+Bs+16A+4B$$

Άρα

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 16A+4B=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2/3 \\ B=1/3 \end{cases}$$

Άρα

$$\frac{s+12}{s^2+20s+64} = \frac{2}{3}\frac{1}{s+4} + \frac{1}{3}\frac{1}{s+16}$$

Επειδή $\mathcal{L}\{e^t\} = \frac{1}{s-1}$ $s>1$

$$L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \quad s>a$$

οπότε ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace θα είναι

$$L^{-1}\{F(s)\} = \frac{2}{3}e^{-4t} + \frac{1}{3}e^{-16t}$$

Άσκηση

Να υπολογίσετε ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

$$F(s) = \frac{1}{s^3+1}$$

Λύση

$$s^3+1 = (s^2-s+1)(s+1)$$

οπότε

$$\frac{1}{s^3+1} = \frac{1}{(s+1)(s^2-s+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+\Gamma}{s^2-s+1}$$

Άρα

$$1 = A(s^2-s+1) + (Bs+\Gamma)(s+1) \Rightarrow \ldots \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A = 1/3 \\ B = -1/3 \\ \Gamma = 2/3 \end{cases}$$

οπότε

$$\frac{1}{s^3+1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s+1} + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{-s+2}{s^2-s+1}\right)$$

Αλλά

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t}$$

και

$$L^{-1}\left\{\frac{-s+2}{s^2-s+1}\right\} = -L^{-1}\left\{\frac{s-2}{(s-\frac{1}{2})^2+3/4}\right\} = -L^{-1}\left\{\frac{s-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{(s-\frac{1}{2})^2+3/4}\right\} =$$

Scanned by CamScanner

$$= -\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{s-1/2}{(s-1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2} \right\} + \sqrt{3}\, \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{\sqrt{3}/2}{(s-1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2} \right\} =$$

$$= -e^{\frac{1}{2}t} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \sqrt{3}\, e^{-\frac{1}{2}t} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

▶ Συνέλιξη συναρτήσεων

Έστω f, g δύο συναρτήσεων ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$ για $\forall\, b>0$

Η συνέλιξη των f, g ορίζεται για $t>0$ ως εξής:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

▶ Ιδιότητες

1) $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$ αντιμεταθετική

2) $f(t) * (\lambda h(t) + \mu g(t)) = \lambda f(t) * h(t) + \mu f(t) * g(t)$ επιμεριστική

3) $f(t) * [h(t) * g(t)] = [f(t) * h(t)] * g(t)$

απόδειξη

1) $f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$ θέτω $w = t-\tau$ τότε

$dw = -d\tau$ εάν $\begin{cases} \tau = 0 \Rightarrow w = t \\ \tau = t \Rightarrow w = 0 \end{cases}$

οπότε

$$\int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau = -\int_t^0 f(t-w)\, g(w)\, dw =$$

$$= \int_0^t g(w)\, f(t-w)\, dw = g(t) * f(t)$$

2) $f(t) * (\lambda h(t) + \mu g(t)) = \int_0^t f(t)\, (\lambda h(t-\tau) + \mu g(t-\tau))\, d\tau =$

$$= \lambda \int_0^t f(\tau)\, h(t-\tau) + \mu \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau = \lambda f(t) * h(t) + \mu f(t) * g(t)$$

3) $f(t) * [h(t) * g(t)] = f(t) * \underbrace{\int_0^t h(\tau)(g(t-\tau)d\tau)}_{b(t)} =$

$= \int_0^t f(\tau) \cdot \int_0^{t-\tau} h(w) g(t-\tau-w)\, dw\, d\tau =$

$= \int_0^t \int_0^{t-\tau} f(\tau) h(w) g(t-\tau-w)\, dw\, d\tau$

Θέτουμε $x = w + \tau$ άρα $dx = dw$

εάν $w = 0 \Rightarrow x = \tau$

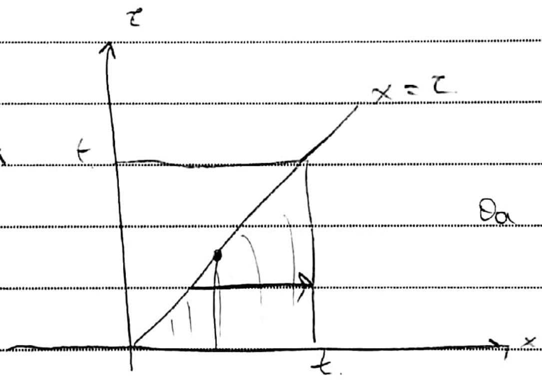
εάν $w = t-\tau \Rightarrow x = t$

οπότε

$\int_0^t \int_0^{t-\tau} f(\tau) h(w) g(t-\tau-w)\, dw\, d\tau =$

$= \int_0^t \int_\tau^t f(\tau) h(x-\tau) g(t-x)\, dx\, d\tau =$

Από fubini αλλάζω άκρα ολοκλ.



θα είναι το χωρίο μου

$= \int_0^t \int_0^x f(\tau) h(x-\tau) g(t-x)\, d\tau\, dx = \int_0^t g(t-x) \underbrace{\int_0^x f(\tau) h(x-\tau)\, d\tau}_{f(t) * h(t)} dx =$

$= \int_0^t \left(\int_0^x f(\tau) h(x-\tau)\, d\tau \right) g(t-x)\, d\tau = [f(t) * h(t)] * g(t)$

Θεώρημα

Έστω f, g δύο συναρτήσεις κατά τμήματα συνεχείς σε κάθε διάστημα της μορφής $[0, b]$, $b > 0$ και εκθετικής τάξης a

και $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$

τότε

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s) \cdot G(s), \quad s > a$$

- Συνεπώς εάν $\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s)\, G(s)$ τότε

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\, G(s)\} = f(t) * g(t)$$

Άσκηση

Έστω $f(t) = t$ και $g(t) = e^{at}$, $t \geq 0$. Να υπολογιστεί η συνέλιξη $f(t) * g(t)$

Λύση

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t \tau\, e^{a(t-\tau)}\, d\tau =$$

$$= e^{at} \int_0^t \tau\, e^{-a\tau}\, d\tau = e^{at} \int_0^t \tau \left(-\frac{1}{a} e^{-a\tau}\right)' d\tau =$$

$$= -\frac{t}{a} - \frac{1}{a^2}(e^{at} - 1)$$